JOURNAL OF ALGEBRA 133, 168–181 (1990)

Fittingmengen und Lockettabschnitte

JOACHIM PENSE

Fachbereich Mathematik,
Universität Mainz, Postfach 3980,
6500 Mainz, West Germany

Communicated by G. Stroth

Received November 11, 1988

The theory of Lockett sections is transferred from Fitting classes to Fitting sets. This in general works only partially; in some special groups (which I call "mobility" groups), however, among these the stable linear groups, a literal translation of the Fitting class theory is possible. As the groups relevant in outer Fitting pairs actually are mobility groups, a new way of deriving information on the Lockett section of a Fitting class arises. This is used to present a simplified, if nonsoluble, counterexample to Lockett's conjecture and to decide a related question. Also, an approach to generating Fitting classes is given. © 1990 Academic Press, Inc.

EINLEITUNG

Der Verband der Fittingklassen endlicher Gruppen ist disjunkte Vereinigung von Intervallen, den sogenannten Lockettabschnitten, von denen jeder zum Untergruppenverband einer abelschen Gruppe isomorph ist.

Die Rolle der Lockettabschnitte in der Betrachtung von Fittingklassen ist aus zwei Gründen zentral: Einmal kann man weitgehend nur innerhalb dieser Abschnitte leicht verbandstheoretische Aussagen über Fittingklassen treffen (etwa über maximale Teilfittingklassen oder über das Erzeugnis zweier Fittingklassen); andererseits bestimmt die Lage einer Fittingklasse in ihrem Lockettabschnitt den Grad der Anpassung ihres Radikals an direkte Produkte.

Wir wollen die Lockett-Theorie auf Fittingmengen übertragen. Fittingmengen sind "Fittingklassen innerhalb einer Gruppe" und wurden von Anderson [1] eingeführt, um die Untergruppenstruktur endlicher auflösbarer Gruppen zu untersuchen. In [10] wird der Begriff der Fittingmenge für den ganz anderen Zweck verwendet, die Konstruktion von Fittingklassen mithilfe der sogenannten äußeren Fittingpaare zu vereinfachen und zu vereinheitlichen.

0021-8693/90 $3.00

Für die Einführung von Lockettabschnitten von Fittingklassen braucht man folgende Eigenschaften direkter Produkte: Erstens existiert zu gegebenen Gruppen immer deren direktes Produkt (genauer ein direktes Produkt isomorpher Kopien), und zweitens liegt in der Automorphismengruppe einer direkten Potenz immer eine volle Symmetrische Gruppe, die die Komponenten permutiert. Wir wollen diese Eigenschaften in "lokalisierter" Form für die Untergruppen einer Gruppe axiomatisch fordern. Gruppen, in denen diese Axiome gelten, nennen wir Beweglichkeitsgruppen. Sicher kann eine Beweglichkeitsgruppe nicht endlich sein.

Die Übertragung der Lockett-Theorie auf Fittingmengen ist in Beweglichkeitsgruppen verlustfrei möglich; in beliebigen Gruppen kann man immerhin noch den "unteren Lockett-Stern" definieren, allerdings ohne dessen verbandstheoretische Eigenschaften zu erhalten.

Die wichtigsten Beispiele für Beweglichkeitsgruppen sind die Gruppen der Form $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Aut}(J^x)$ (J eine (abelsche oder nichtabelsche) einfache endliche Gruppe). Diese sind gerade auch die wichtigsten Zielgruppen für äußere Fittingpaare (nämlich für die durch die Operation von Gruppen auf ihren abelschen Hauptfaktoren definierten); in der Tat erlauben diese äußeren Fittingpaare auch, an den Lockettabschnitten von Fittingmengen in $\mathbf{L}_p$ Information über die Lockettabschnitte der zugerhörigen Fittingklassen abzulesen. Als Anwendung erhält man ein neues, einfacheres Gegenbeispiel zur Lockettvermutung und eine (negative) Entscheidung der Frage, ob sich der "untere Lockett-Stern" an Durchschnitte anpaßt.

Eine andere (eingeschränktere) Anwendung von Fittingmengen in $\mathbf{L}_p$ erlaubt Aussagen über die Erzeugung von Fittingklassen; wir zeigen einen Satz, der eine Vereinfachung des Beweises eines Ergebnisses von Johnsen und Laue [7] ermöglicht und diesen (wenigstens in einer Richtung) verallgemeinert.

Alle Ergebnisse dieses Artikels, mit Ausnahme von 3.16, der vorliegenden Version von 3.17, sowie 4.2(b), stammen aus der Dissertation des Autors [11].

1. Vorbereitungen

Wir unterscheiden zwischen endlichen Grupen G, H, ..., und möglicherweise unendlichen Gruppen $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$, ..., durch die Schreibweise.

"$S \trianglelefteq\trianglelefteq G$" bedeutet, daß S ein Subnormalteiler von G ist.

Mit $[\mathbf{G}]\,\mathbf{H}$ bezeichnen wir semidirekte Produkte von Gruppen $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ mit Normalteiler $\mathbf{G}$.

$\mathrm{Sym}(n)$ ist die Symmetrische Gruppe auf n Ziffern, $\mathrm{Dih}(2n)$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$.

$\mathbf{U} \leqslant \mathbf{G} \times \mathbf{H}$ *heißt subdirekt* ($\mathbf{U}$ **sd** $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$), wenn die Projektionen von $\mathbf{U}$

auf die Komponenten $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ surjektiv sind. (Entsprechend auch für mehrfache und unendliche direkte Produkte.)

Die Basisgruppe eines Kranzproduktes $\mathbf{G} \wr \mathbf{H}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{G}^{\natural}$; für $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{G}$ ergibt sich die Bezeichnung $\mathbf{U}^{\natural}$ für die kanonische $\mathbf{H}$-invariante direkte Potenz von Kopien von $\mathbf{U}$ in $\mathbf{G}^{\natural}$.

Definition 1.1. Sei $\mathbf{Y}$ eine Gruppe.

(a) Mit $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ bezeichnen wir das eingeschränkte direkte Produkt abzählbar unendlich vieler Kopien von $\mathbf{Y}$. Diese Beschreibung zeichnet eine direkte Zerlegung von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ in Kopien von $\mathbf{Y}$ aus. Unter einer *guten Zerlegung* von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ verstehen wir eine direkte Zerlegung von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ in Kopien von $\mathbf{Y}$, die sich nur durch endlich viele Komponenten von der ausgezeichneten Zerlegung unterscheidet. $\mathbf{A}_{\mathbf{Y}}$ sei die Gruppe der Automorphismen von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$, die fast alle Komponenten der ausgezeichneten Zerlegung von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ zentralisieren.

(b) Zwei Untergruppen $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ von $\mathbf{A}_{\mathbf{Y}}$ heißen *disjunkt*, falls es eine gute Zerlegung $\mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 \times \cdots$ von $\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}$ gibt, so daß für alle $i \in \mathbb{N}$ die Implikationen $\mathbf{Y}_i \notin \mathrm{C}_{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}}(U) \Rightarrow \mathbf{Y}_i \in \mathrm{C}_{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}}(V)$ und $\mathbf{Y}_i \notin \mathrm{C}_{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}}(V) \Rightarrow \mathbf{Y}_i \in \mathrm{C}_{\mathbf{D}_{\mathbf{Y}}}(U)$ gelten.

(c) Sei p eine Primzahl. $\mathbf{L}_p$ bezeichnet die stabile lineare Gruppe über $\mathrm{GF}(p)$, also die Menge derjenigen Automorphismen eines abzählbar-dimensionalen Vektorraumes über $\mathrm{GF}(p)$, die jeweils fast alle Elemente einer festen Basis festlassen. Wir nehmen die Identifikationen $\mathrm{GL}(0, p) \leqslant \mathrm{GL}(1, p) \leqslant \mathrm{GL}(2, p) \leqslant \cdots \leqslant \mathbf{L}_p$ vor.

(d) Mit $\mathbf{S}$ bezeichnen wir die Gruppe derjenigen Permutationen von $\mathbb{N}$, die nur endlich viele Ziffern bewegen. Ist $\mathbf{G}$ eine Gruppe, so bezeichne $\mathbf{G} \wr \mathbf{S}$ immer das natürliche und eingeschränkte Kranzprodukt von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{S}$. Wir nehmen die Identifikationen $\mathrm{Sym}(n) = 1 \wr \mathrm{Sym}(n)$, $\mathbf{S} = 1 \wr \mathbf{S}$ und $\mathbf{G} = \mathbf{G} \wr \mathrm{Sym}(1) \leqslant \mathbf{G} \wr \mathrm{Sym}(2) \leqslant \cdots \leqslant \mathbf{G} \wr \mathbf{S}$ vor.

(e) Zwei Untergruppen $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ von $\mathbf{G} \wr \mathbf{S}$ nennen wir disjunkt, wenn für alle $(\pi, g_1, g_2, \ldots) \in \mathbf{U}$, $(\tau, h_1, h_2, \ldots,) \in \mathbf{V}$ gilt: $g_i \neq 1 \Rightarrow h_i = 1$, $h_i \neq 1 \Rightarrow g_i = 1$, $\pi(i) \neq i \Rightarrow \tau(i) = i$, $\tau(i) \neq i \Rightarrow \pi(i) = i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Für eine endliche einfache Gruppe J ist offenbar $\mathbf{A}_J = \mathrm{Aut}(J) \wr \mathbf{S}$, falls $J = J'$ (und in diesem Fall stimmen die Disjunktheitsbegriffe aus 1.1(b) und aus 1.1(e) überein), und $\mathbf{A}_J = \mathbf{L}_p$ falls $J = Z_p$.

Die Bezeichnungen und bekannten Ergebnisse über Fittingklassen finden sich z. B. in [6]. Ich weise hier nur darauf hin, daß in diesem Artikel $\mathscr{E}$ die Klasse aller endlichen Gruppen bezeichnet.

Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe. Unter einer *Untergruppenklasse* von $\mathbf{G}$ verstehen wir eine unter Konjugation in $\mathbf{G}$ abgeschlossene Menge endlicher Untergruppen von $\mathbf{G}$. Ist M eine Menge endlicher Untergruppen von $\mathbf{G}$, so bezeichnet $(\mathsf{M})_{\mathbf{G}}$ die von M erzeugte Untergruppenklasse. Auch hierbei lassen wir die geschweiften Mengenklammern gewohnlich weg. schreiben also etwa $(U, V, W)_{\mathbf{G}}$ statt $(\{U, V, W\})_{\mathbf{G}}$. Ist $\mathscr{X}$ eine Gruppenklasse, so bezeichnet $\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{X})$ die Menge aller Untergruppen von $\mathbf{G}$, die in $\mathscr{X}$ liegen, die *Spur* von $\mathscr{X}$ in $\mathbf{G}$. Wir schreiben $\mathbf{E}_{\mathbf{G}} := \mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{E})$ für die Klasse aller endlichen Untergruppen von $\mathbf{G}$.

Die Operatoren $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{N}_0$ für Untergruppenklassen von $\mathbf{G}$ definieren wir genau wie die Operatoren $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{N}_0$ bei Gruppenklassen.

Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe. Eine nichtleere $\mathbf{S}_n$- und $\mathbf{N}_0$-abgeschlossene Untergruppenklasse von $\mathbf{G}$ heißt *Fittingmenge* von $\mathbf{G}$. Die von einer Menge $\mathbf{M}$ endlicher Untergruppen von $\mathbf{G}$ erzeugte Fittingmenge bezeichnen wir mit $\mathrm{Fitset}_{\mathbf{G}}(\mathbf{M})$. Die Spur einer Fittingklasse ist immer eine Fittingmenge. Ist $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$, so ist $\mathbf{E}_{\mathbf{N}}$ sogar eine Fittingmenge von ganz $\mathbf{G}$.

Ist $\mathbf{F} = \mathbf{N}_0\mathbf{F}$, und ist $U \in \mathbf{E}_{\mathbf{G}}$, so bezeichnet $U_{\mathbf{F}}$ den größten $\mathbf{F}$-(Sub)-normalteiler von U, das *Radikal* der Untergruppenklasse $\mathbf{F}$ in U. Ist $V \trianglelefteq U$, so gilt $V_{\mathbf{F}} \trianglelefteq U$. (Denn: Ist $u \in U$, so $(V_{\mathbf{F}})^x \trianglelefteq V$, $(V_{\mathbf{F}})^x \in \mathbf{F}$.)

Für Fittingmengen gilt das *Quasi*-R_0-*Lemma*:

Lemma 1.2. *Sei* $\mathbf{F}$ *eine Fittingmenge von* $\mathbf{G}$, U **sd** $V_1 \times V_2 \in \mathbf{E}_{\mathbf{G}}$, $U/((U \cap V_1) \times (U \cap V_2))$ *nilpotent*, $V_1 \in \mathbf{F}$. *Dann* $U \in \mathbf{F} \Leftrightarrow V_2 \in \mathbf{F}$.

Beweis. Sicher ist $U \trianglelefteq\trianglelefteq D := V_1 \times V_2$. Ist nun $U \in \mathbf{F}$, so ist $D = V_1 U \in \mathrm{N}_0\mathbf{F} = \mathbf{F}$, und dann auch $V_2 \in \mathbf{F}$, da $V_2 \trianglelefteq D$. Ist umgekehrt $V_2 \in \mathbf{F}$, so gilt $D = V_1 \trianglelefteq V_2 \in \mathrm{N}_0\mathbf{F} = \mathbf{F}$, und wegen $U \trianglelefteq\trianglelefteq D$ daher $U \in \mathbf{F}$.

2. Disjunktheit und Beweglichkeit

Definition 2.1. Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe. Eine *Disjunktheitsrelation* für $\mathbf{G}$ ist eine Relation **dis** auf $\mathbf{E}_{\mathbf{G}}$, so daß für $U_1, U_2 \in \mathbf{E}_{\mathbf{G}}$ die Aussage "U_1 **dis** U_2" folgendes impliziert:

(**Dis1**) $[U_1, U_1] = 1$,

(**Dis2**) $U_1 \cap U_2 = 1$,

(**Dis3**) V_1 **dis** V_2 für $V_i \leqslant U_i$ $(i := 1, 2)$.

Ist **dis** eine solche Disjunktheitsrelation für $\mathbf{G}$, und gilt U_1 **dis** U_2 für Untergruppen U_i von G, so nennen wir U_1 und U_2 *disjunkte* Untergruppen. Sind U_1 und U_2 disjunkte Untergruppen von $\mathbf{G}$, so bezeichnen wir ihr Erzeugnis mit $U_1 * U_2$ und sprechen von dem *disjunkten Produkt* von U_1 und U_2. Mehrfache disjunkte Produkte sind analog zu mehrfachen direkten Produkten definiert, ebenso disjunkte Zerlegungen etc.

Bezeichnung 2.2. Die in 1.1(b) und (e) definierten Disjunktheitsbegriffe in $\mathbf{A}_Y$ und $\mathbf{G} \wr \mathbf{S}$ sind offenbar in der Tat Disjunktheitsrelationen, die wir immer implizit als die in diesen Gruppen gewählte Disjunktheitsrelationen betrachten wollen.

Die Gruppe $GL(1, 7) \simeq Z_3 \times Z_3$ ist in $\mathbf{L}_7$ nicht disjunktes Produkt der beiden direkten Komponenten; der Begriff des disjunkten Produktes ist also eine echte Verschärfung des Begriffes des (inneren) direkten Produktes.

DEFINITION 2.3. Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe mit Disjunktheitsrelation, und sei $U \in \mathbf{E}_\mathbf{G}$. Eine n-te *disjunkte Potenz* von U ist ein disjunktes Produkt $U^{t_1} * \cdots * U^{t_n}$ von Konjugierten von U, wobei die t_i Involutionen von $\mathbf{G}$ sind, und jedes t_i die Gruppe U^{t_j} für $i \neq j$ zentralisiert. (Eine nullte disjunkte Potenz ist die Einsuntergruppe.)

KOROLLAR 2.4. *Sei S die von den Produkten $t_i t_j t_i$ $(i \neq j := 1, ..., n)$ aus 2.3 erzeugte Untergruppe von $\mathbf{G}$. Dann induziert S auf dem Produkt $U^{t_1} * \cdots * U^{t_n}$ (das ja ein direktes Produkt der U^{t_i} ist) als Automorphismengruppe eine volle Symmetrische Gruppe.*

Beweis. $t_i t_j t_i$ ist eine Involution, die U^{t_i} und U^{t_j} vertauscht und die anderen U^{t_k} zentralisiert. Wir erhalten eine Permutationsdarstellung von S auf der Menge $\{U^{t_1}, ..., U^{t_n}\}$; sicher erzeugen all diese Transpositionen eine volle $\mathrm{Sym}(n)$.

DEFINITION 2.5. Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe mit Disjunktheitsrelation **dis**. $\mathbf{G}$ heißt *Beweglichkeitsgruppe*, wenn gilt:

(**MG1**) Sind $U_1, ..., U_n \in \mathbf{E}_\mathbf{G}$, so gibt es $g_1, ..., g_n \in \mathbf{G}$, so daß

$$U_1^{g_1} \cdots U_n^{g_n} = U_1^{g_1} * \cdots * U_n^{g_n};$$

(**MG2**) Ist $U \in \mathbf{E}_\mathbf{G}$, und ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert eine n-te disjunkte Potenz von U in $\mathbf{E}_\mathbf{G}$;

(**MG3**) Sind $U_1, ..., U_n \in {}_\mathbf{G}$, und sind $g_1, ..., g_n, h_1, ..., h_n$ Elemente von $\mathbf{G}$, so daß $U_1^{g_1} \cdots U_n^{g_n} = U_1^{g_1} * \cdots * U_n^{g_n}$ und $U_1^{k_1} \cdots U_n^{k_n} = U_1^{k_1} * \cdots * U_n^{k_n}$, so sind diese beiden disjunkten Produkte konjugiert in $\mathbf{G}$.

Nun der wichtigste Beispieltyp für Beweglichkeitsgruppen:

SATZ 2.6. *Sei $\mathbf{Y}$ eine Gruppe. Dann ist die Gruppe $\mathbf{A}_\mathbf{Y}$ eine Beweglichkeitsgruppe.*

Beweis. Seien $U_1, U_2 \in \mathbf{E}_{\mathbf{A}_\mathbf{Y}}$. Sei $\mathbf{D}_\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 \times \cdots$ eine gute Zerlegung von $\mathbf{D}_\mathbf{Y}$. Dann wird für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ die Gruppe $\mathbf{Y}_i$ für alle $i > m$ von U_1 und U_2 zentralisiert. Sei $t \in \mathbf{A}_\mathbf{Y}$ der Automorphismus von $\mathbf{D}_\mathbf{Y}$, der $\mathbf{Y}_i$ mit $\mathbf{Y}_{m+i}$ vertauscht $(i := 1, ..., m)$ und alle übrigen $\mathbf{Y}_i$ zentralisiert. Dann sind U_1 and U_2^t disjunkt. Damit gilt (MG1) aus 2.5 für $n = 2$; durch Induktion erhalten wir den allgemeinen Fall.

Setze $U := U_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren Involutionen $t_1, ..., t_n \in \mathbf{A_Y}$ durch die Vorschrift, daß t_j die Komponenten $\mathbf{Y}_i$ und $\mathbf{Y}_{jm+i}$ vertauscht $(i := 1, ..., m,\ j := 1, ..., n)$ und alle anderen Komponenten zentralisiert. Dann ist $U^{t_1} * \cdots * U^{t_n}$ eine n-te disjunkte Potenz von U, und (MG2) aus 2.5 ist gezeigt.

Wir zeigen (MG3): Sei $\langle U_1^{g_1}, ..., U_n^{g_n} \rangle = U_1^{g_1} * \cdots * U_n^{g_n}$, mit $g_1, ..., g_n \in \mathbf{A_Y}$. Wir können in (MG3) $h_i = 1$ für alle i annehmen und suchen somit $g \in \mathbf{A_Y}$, so daß $(U_1 * \cdots * U_n)^g = U_1^{g_1} * \cdots * U_n^{g_n}$.

Es gibt eine gute Zerlegung $\mathbf{D_Y} = \mathbf{Y}_{11} \times \cdots \times \mathbf{Y}_{1m_1} \times \cdots \times \mathbf{Y}_{n1} \times \cdots \times \mathbf{Y}_{nm_n} \times \mathbf{Y}_1 \times \mathbf{Y}_2 \times \cdots$, so daß die Gruppe U_i jeweils alle $\mathbf{Y}_{jk}$ mit $j \neq i$ und die einfach indizierten $\mathbf{Y}_l$ zentralisiert. Eine ebensolche Zerlegung $\mathbf{D_Y} = \overline{\mathbf{Y}_{11}} \times \cdots \times \overline{\mathbf{Y}_{1m_1}} \times \cdots \times \overline{\mathbf{Y}_{n1}} \times \cdots \times \overline{\mathbf{Y}_{nm_n}} \times \overline{\mathbf{Y}_1} \times \overline{\mathbf{Y}_2} \times \cdots$ existiert für die $U_i^{g_i}$; hierbei gilt: fast alle einfach indizierten $\mathbf{Y}_k$ stimmen bei geeigneter Numerierung mit $\overline{\mathbf{Y}_k}$ überein (da beides gute Zerlegungen sind); außerdem kann jeweils $\overline{\mathbf{Y}_{ij}} = g_i(\mathbf{Y}_{ij})$ gewählt werden. Wir definieren nun g durch die Wirkung auf den $\mathbf{Y}_{ij}$, $\mathbf{Y}_k$: $g(y) := g_i(y)$ falls $y \in \mathbf{Y}_{ij}$; wir setzen g geeignet fort, so daß $g(\mathbf{Y}_k) = (\overline{\mathbf{Y}_k})$, dabei $g|_{\mathbf{Y}k} = \mathrm{id}$ falls $\mathbf{Y}_k = \overline{\mathbf{Y}_k}$. Dies definiert tatsächlich ein Element von $\mathbf{A_Y}$ (denn g zentralisiert fast alle $\mathbf{Y}_i$). Dies ist das gesuchte g.

Analog zeigt man:

SATZ 2.7. *Sei* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe. Dann ist die Gruppe* $\mathbf{G} \wr \mathbf{S}$ *eine Beweglichkeitsgruppe.*

3. LOCKETTABSCHNITTE, FITTINGMENGENPAARE UND LAUSCHGRUPPEN

Wir können jetzt die Lockett-Theorie für Fittingklassen fast wörtlich auf Fittingmengen übertragen (vgl. [6, Seiten 46 bis 51] für die Fittingklassen-Version).

3.1. *Lockettabschnitte in Beweglichkeitsgruppen*

Sei $\mathbf{G}$ eine feste Beweglichkeitsgruppe. Für jedes $U \in \mathbf{E_G}$ sei U^n eine beliebig gewählte n-te disjunkte Potenz von U. Wir schreiben $(u_1, ..., u_n)$ $(u_i \in U)$ für $u_1^{t_1} \cdots u_n^{t_n}$ (t_i wie in 2.3).

Sei F eine Fittingmenge von $\mathbf{G}$. Beachte, daß $(U^n)_\mathsf{F}$ unter Komponentenpermutationen invariant ist, da diese von inneren Automorphismen von $\mathbf{G}$ induziert werden; beachte weiter, daß $(U^2)_\mathsf{F}$ auf verschiedene Weisen durch innere Automorphismen von $\mathbf{G}$ in $(U^n)_\mathsf{F}$ eingebettet werden kann; etwa im Fall $n = 3$ solche der Form $(x, y) \to (1, x, y)$ bzw. $(x, y) \to (x, 1, y)$, etc.

DEFINITION 3.1. Sei F eine Fittingmenge in $\mathbf{G}$. Sei $\mathsf{F}^* := (U \in \mathbf{E_G} \mid W_\mathsf{F}\ \mathbf{sd}\ W$ für jede disjunkte Potenz W von $U)_\mathbf{G}$.

SATZ 3.2. *Sei* F *eine Fittingmenge in* $\mathbf{G}$.

(a) F^* *ist eine Fittingmenge.*

(b) $(\mathsf{F}^*)^* = \mathsf{F}^*$.

(c) $\mathsf{F} = \mathsf{F}^* \Leftrightarrow (U*V)_{\mathsf{F}} = U_{\mathsf{F}}*V_{\mathsf{F}}$ *für alle Paare* (U, V) *disjunkter Untergruppen von* $\mathbf{G}$.

Eine Fittingmenge F von $\mathbf{G}$ mit $\mathsf{F} = \mathsf{F}^*$ heißt *Lockettmenge.* Ist F eine Fittingmenge von $\mathbf{G}$, so ist die Menge Locksec(F) aller Fittingmengen H von $\mathbf{G}$ mit $\mathsf{H}^* = \mathsf{F}^*$ der *Lockettabschnitt* von F. Der Durchschnitt F_* von Locksec(F) ist selbst ein Element von Locksec(F); ist H eine Fittingmenge, so gilt $\mathsf{H} \in \text{Locksec}(\mathsf{F}) \Leftrightarrow \mathsf{F}_* \subseteq \mathsf{H} \subseteq \mathsf{F}^*$. Wir definieren außerdem Locksub(F) $:= \{\mathsf{H} \in \text{Locksec}(\mathsf{F}) \mid \mathsf{H} \subseteq \mathsf{F}\}$.

SATZ 3.3. *Sei* F *eine Fittingmenge von* $\mathbf{G}$. *Dann*

$$(\mathsf{F}_*)_* = \mathsf{F}_*(\mathsf{F}^*)_* \subseteq \mathsf{F} \subseteq \mathsf{F}^* = (\mathsf{F}_*)^* = (\mathsf{F}^*)^*.$$

SATZ 3.4. *Für* $U \in \mathsf{F}$ *gilt* $[U, N_{\mathbf{G}}(U)] \leqslant U_{\mathsf{F}}$.

Bemerkung 3.5. Ist $U \in \mathsf{F}$, so ist $U' \in \mathsf{F}_*$.

3.2. *Fittingmengenpaare und Lauschgruppen in beliebigen Gruppen*

Sei wieder $\mathbf{G}$ feste Gruppe, allerdings nicht notwendig eine Beweglichkeitsgruppe.

Einige Begriffe aus [6] müssen "lokalisiert" werden:

Statt von normalen Einbettungen sprechen wir von $\mathbf{G}$-normalen Einbettungen: Unter einer $\mathbf{G}$-normalen Einbettung von $U \in \mathsf{E}_{\mathbf{G}}$ verstehen wir eine normale Einbettung $\alpha: U \to V$, die als Einschränkung eines inneren Automorphismus von $\mathbf{G}$ auf U beschrieben werden kann.

DEFINITION 3.6. Sei F eine Fittingmenge von $\mathbf{G}$. Ein *normales* F*-Fittingmengenpaar* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ (bezüglich $\mathbf{G}$) besteht aus einer abelschen Gruppe $\mathbf{A}$, und einer Familie von Homomorphismen $(\mathbf{d}_U: U \to \mathbf{A} \mid U \in \mathsf{F})$, so daß $\mathbf{d}_U = \mathbf{d}_V \circ \alpha$ für alle $U, V \in \mathsf{F}$ und alle $\mathbf{G}$-normalen Einbettungen $\alpha: U \to V$.

An die Stelle des Begriffes der "charakteristischen Hyperzentralität" in [6] tritt der der $\mathbf{G}$-Hyperzentralität:

DEFINITION 3.7. Gilt $S \leqslant R \leqslant U \in \mathsf{E}_{\mathbf{G}}$, R, $S \trianglelefteq \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(U) =: \mathbf{T}$, so sagen wir, R/S sei $\mathbf{G}$-*zentral*, wenn $[R, \mathbf{T}] \leqslant S$; Wir sagen, R/S sei $\mathbf{G}$-*hyperzentral*, wenn $[R, \mathbf{T}, ..., \mathbf{T}] \leqslant S$ für eine hinreichende Anzahl von Wiederholungen von $\mathbf{T}$. Mit diesem Begriff zeigt man dann wie bei Fittingklassen:

SATZ 3.8. *Sei* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *ein normales* F-*Fittingmengenpaar. Dann ist*

$$\mathsf{K} := \mathrm{Ker}(\mathbf{d}, \mathbf{A}) := (U \in \mathsf{F} \mid \mathbf{d}_U(U) = 1)_{\mathbf{G}}$$

eine Teilfittingmenge von F; *ist* $\mathbf{G}$ *eine Beweglichkeitsgruppe, so gilt* $\mathsf{F}_* \subseteq \mathsf{K}$.

DEFINITION 3.9. Sei F eine Fittingmenge von $\mathbf{G}$. Das *universelle normale Fittingmengenpaar* von F ist der Co-Limes $(\delta, \Lambda(\mathsf{F}))$ über die Fittingmenge F und die $\mathbf{G}$-normalen Einbettungen. $\Lambda(\mathsf{F})$ ist die *Lauschgruppe* von F.

$\Delta(\mathsf{F})$ sei das eingeschränkte direkte Produkt über ein Konjugiertenklassenvertretersystem $\mathrm{Skel}(\mathsf{F})$ von F, und $\Gamma(\mathsf{F})$ die Untergruppe, die von den Elementen der Form $(\varepsilon_U u)^{-1}(\varepsilon_V \alpha u)$ $(U, V \in \mathrm{Skel}(\mathsf{F}),\ u \in U,\ \alpha\colon U \to V$ eine $\mathbf{G}$-normale Einbettung, $\varepsilon_U, \varepsilon_V$ die natürlichen Einbettungen von U und V in $\Delta(\mathsf{F}))$ erzeugte Untergruppe. Definieren wir $\Lambda(\mathsf{F}) := \Delta(\mathsf{F})/\Gamma(\mathsf{F})$ und $\delta_U u = (\varepsilon_U u)\,\Gamma(\mathsf{F})$ $(u \in U \in \mathsf{F})$, so erhalten wir wieder das universelle normale F-Fittingmengenpaar.

Statt des Konjugiertenklassenvertretersystems könnte man—mit gleichem Resultat—auch die Elemente von F selbst wählen, was für Klassen aus mengentheoretischen Gründen nicht möglich ist.

SATZ 3.10. *Sei* F *eine Fittingmenge in der Beweglichkeitsgruppe* $\mathbf{G}$. *Für* $\mathsf{H} \in \mathrm{Locksub}(\mathsf{F})$ *definieren wir* $\Xi(\mathsf{H}) := \langle \delta_U U \mid U \in \mathsf{H} \rangle$. *Die Abbildung* Ξ *ist ein Isomorphismus des Verbandes* $\mathrm{Locksub}(\mathsf{F})$ *mit dem Untergruppenverband von* $\Lambda(\mathsf{F})$.

Insbesondere ist F_* der Kern des universellen normalen Fittingmengenpaares, falls $\mathbf{G}$ eine Beweglichkeitsgruppe ist. Wir können demnach die Definition von F_* sinnvoll ausdehnen:

DEFINITION 3.11. Ist $\mathbf{G}$ eine Gruppe, F eine Fittingmenge von $\mathbf{G}$, so ist F_* definiert als der Kern des universellen normalen F-Fittingmengenpaares.

Beachte, daß die Aussage $U \in \mathsf{F} \Rightarrow U' \in \mathsf{F}_*$ in beliebigen Gruppen gültig bleibt.

Da der untere Stern in beliebigen Gruppen nicht idempotent sein muß (s.u. 3.19(b)), definieren wir noch

$$\mathsf{F} \supseteq \mathsf{F}_* \supseteq (\mathsf{F}_*)_* \supseteq \cdots,$$

die *absteigende Zentralreihe* der Fittingmenge F.

3.3. *Übergänge zwischen Mengen und Klassen*

Wir beschreiben einige Beziehungen zwischen Lockettabschnitten von Fittingmengen und denen von Fittingklassen:

Satz 3.12. *Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse,* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe.*

(a) *Ist* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *ein normales* $\mathscr{F}$*-Fittingpaar, so definiert die Einschränkung von* $\mathbf{d}$ *auf* $\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F})$ *ein normales* $\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F})$*-Fittingmengenpaar, das wir mit* $(\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathbf{d}), \mathbf{A})$ *bezeichnen.*

(b) *Ist* $\mathbf{G}$ *Beweglichkeitsgruppe, so gilt* $\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F}^*) = (\mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F}))^*$.

Beweis. (a) Jede $\mathbf{G}$-normale Einbettung ist eine normale Einbettung.

(b) Sei $\mathsf{F} := \mathrm{tr}_{\mathbf{G}}(\mathscr{F})$. Ist $U \in \mathsf{E}_{\mathbf{G}}$, U^2 ein disjunktes Quadrat von U, so gilt: $U \in \mathsf{F}^* \Leftrightarrow (U^2)_{\mathsf{F}}\, \mathbf{sd}\, U^2 \Leftrightarrow (U^2)_{\mathscr{F}}\, \mathbf{sd} U^2 \Leftrightarrow (U \times U)_{\mathscr{F}}\, \mathbf{sd}\, U \times U \Leftrightarrow U \in \mathscr{F}^*$.

Bemerkung 3.13. Sei $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ ein äußeres $\mathscr{U}$-Fittingpaar, F eine Fittingmenge von $\mathbf{A}$. Ist $(\mathbf{e}, \mathbf{B})$ ein normales F-Fittingmengenpaar, so wird durch

$$(\mathbf{e} \circ \mathbf{d})_G := \mathbf{e}_{d_G(G)} \circ \mathbf{d}_G$$

ein normales $\mathbf{d}^{-1}\mathsf{F}$-Fittingpaar $(\mathbf{e} \circ \mathbf{d}, \mathbf{B})$ definiert.

Beweis. Sei $v: N \to G \in \mathscr{U}$ eine normale Einbettung. Dann gibt es $\alpha \in \mathrm{Inn}(\mathbf{A})$, so daß $(\mathbf{e} \circ \mathbf{d})_G \circ v = \mathbf{e}_{\mathbf{d}_G G} \circ \mathbf{d}_G \circ v = \mathbf{e}_{\mathbf{d}_G G} \circ \alpha \circ \mathbf{d}_N = \mathbf{e}_{\mathbf{d}(\mathbf{d}_N N)} \circ \mathbf{d}_N = (\mathbf{e} \circ \mathbf{d})_N$, denn α bewirkt eine $\mathbf{A}$-normale Einbettung $\mathbf{d}_N N \to \mathbf{d}_G G$.

Ein normales Fittingmengenpaar, das keine Entsprechung bei Fittingklassen hat, liefert die folgende Beobachtung:

Satz 3.14. *Sei* $\mathbf{G}$ *Gruppe,* $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$. *Dann definiert der kanonische Homomorphismus* $\mathbf{N} \to \mathbf{N}/[\mathbf{N}, \mathbf{G}]$ *ein normales* $\mathsf{E}_{\mathbf{N}}$*-Fittingmengenpaar bezüglich* $\mathbf{G}$, *das wir mit* $(\mathbf{e}^{\mathbf{N}, \mathbf{G}}, \mathbf{N}/[\mathbf{N}, \mathbf{G}])$ *bezeichnen.*

Beweis. Dies ist trivial.

Mit *äußeren Fittingpaaren* kann man bekanntlich aus Fittingmengen Fittingklassen konstruieren. Vergleiche hierzu [10].
Folgende hier benötigte Aussage wurde dort nicht gezeigt:

Satz 3.15. *Ist* $(\mathbf{d}, \mathbf{A})$ *ein äußeres* $\mathscr{U}$*-Fittingpaar, und ist* F *eine Fittingmenge von* $\mathbf{A}$, *so gilt für alle* $G \in \mathbf{U}$: $\mathbf{d}_G^{-1}(\mathbf{d}_G G)_{\mathsf{F}} = G_{\mathbf{d}^{-1}(\mathsf{F})}$.

Beweis. Sei $N := \mathbf{d}_G^{-1}(\mathbf{d}_G G)_{\mathsf{F}}$. Nach Teil 1 ist N ein $\mathscr{F}$-Normalteiler von G. Ist $N \leqslant M \trianglelefteq G$ mit $M \in \mathscr{F}$, so ist $\mathbf{d}_M M \in \mathsf{F}$ konjugiert in $\mathbf{A}$ zu $\mathbf{d}_G M$; also $\mathbf{d}_G M \leqslant (\mathbf{d}_G G)_{\mathsf{F}}$, also $N = M$.

In [10] werden die speziellen äußeren Fittingpaare $\mathbf{d}^{J, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2}$ für eine einfache Gruppe J und zwei feste Fittingklassen $\mathscr{F}_1 \supseteq \mathscr{F}_2$ eingeführt. Das Urbild einer Fittingmenge F unter einem solchen Paar wird dort mit $\mathscr{C}\mathscr{P}(J, \mathsf{F}, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2)$ bezeichnet.

Man kann die festen Fittingklassen $\mathscr{F}_i$ ohne weiteres als Lockettklassen annehmen:

SATZ 3.16. *Mit den Bezeichnungen von* [10] *gilt*:

$$\mathscr{CP}(J, \mathsf{F}, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2) = \mathscr{CP}(J, \mathsf{F}, \mathscr{F}_1^*/\mathscr{F}_2^*).$$

Nach den bekannten Aussagen über Lockettklassen sind nämlich die Hauptfaktoren zwischen $G_{\mathscr{F}_i^*}$ und $G_{\mathscr{F}_i}$ zentral in G für jede endliche Gruppe G, $i := 1, 2$; die Gruppen $\mathbf{d}_G^{J, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2}(G)$ und $\mathbf{d}_G^{J, \mathscr{F}_1^*, \mathscr{F}_2^*}(G)$ stimmen also überein.

Das Urbild einer Lockettmenge unter einem $\mathbf{d}^J$-Paar ist wieder eine Lockettklasse:

SATZ 3.17. *Sei J einfache Gruppe, F Fittingmenge von $\mathbf{A}_J$, $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}_1$ Fittingklassen. Dann gilt*

$$\mathscr{CP}(J, \mathsf{F}, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2)^* = \mathscr{CP}(J, \mathsf{F}^*, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2).$$

Beweis. Wir schreiben $\mathbf{d}$ für $\mathbf{d}^{J, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2}$.

Nach 3.16 können wir annehmen, daß $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ Lockettklassen sind.

(1) *Sei $G \in \mathscr{E}$. Seien G_1 und G_2 die Komponenten von $G \times G$. Dann ist $\mathbf{d}_{G\times G}(G \times G) = \mathbf{d}_{G\times G} G_1 * \mathbf{d}_{G\times G} G_2$, und durch diese disjunkte Zerlegung ist $\mathbf{d}_{G\times G}(G\times G)$ ein disjunktes Quadrat von $\mathbf{d}_{G\times G} G_1$.*

Da $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ Lockettklassen sind, ist $(G\times G)_{\mathscr{F}_1}/(G\times G)_{\mathscr{F}_1}$ als $G\times G$-Gruppe isomorph zu $((G_1)_{\mathscr{F}_1}/(G_1)_{\mathscr{F}_1}) \times ((G_2)_{\mathscr{F}_1}/(G_2)_{\mathscr{F}_1})$. Da G_1 die Hauptfaktoren von G_2 zentralisiert und umgekehrt, sind die Bilder dieser Gruppen unter $\mathbf{d}_{G\times G}$ disjunkt. Außerdem sind sie konjugiert zu $\mathbf{d}_G G$, also auch zueinander. Da $\mathbf{A}_J$ eine Beweglichkeitsgruppe ist (2.6), folgt die Behauptung (1).

Mit $\mathscr{F} := \mathscr{CP}(J, \mathsf{F}, \mathscr{F}_1/\mathscr{F}_1)$ gilt also: $G \in \mathscr{F}^* \Leftrightarrow (G\times G)_{\mathscr{F}}\ \mathbf{sd}\ (G\times G) \Leftrightarrow (\mathbf{d}_{G\times G}(G\times G))_{\mathsf{F}}\ \ \mathbf{sd}\ \ (\mathbf{d}_{G\times G}(G\times G)) \Leftrightarrow ((\mathbf{d}_G G)^2)_{\mathsf{F}}\ \ \mathbf{sd}\ (\mathbf{d}_G G)^2 \Leftrightarrow \mathbf{d}_G\, G \in \mathsf{F}^*$, wobei $(\mathbf{d}_G G)^2$ ein beliebiges disjunktes Quadrat von $\mathbf{d}_G G$ sei.

Untergruppenabgeschlossene Fittingklassen sind Lockettklassen. Dies ist für Fittingmengen nicht richtig, und so ist das wichtigste Kriterium für die Locketteigenschaft leider nicht von Fittingklassen auf Fittingmengen übertragbar:

BEISPIEL 3.18. $\mathbf{S}$ ist nach 2.7 eine Beweglichkeitsgruppe. Die Menge der endlichen Untergruppen von $\mathbf{S}'$ ist sicher untergruppenabgeschlossen. Trotzdem ist sie keine Lockettmenge, da sie der Kern des $\mathbf{E}_s$-Fittingmengenpaares $(e^{s', s}, Z_2)$ ist, aber sicher nicht mit $\mathbf{E}_s$ übereinstimmt.

BEISPIELE 3.19. (a) Sei $S := \mathrm{Sym}(3)$. Wir setzen $A := \mathrm{Alt}(3)$, T eine Untergruppe der Ordnung 2. Als Fittingmengen erhalten wir: $\mathsf{F}_1 := (S, A, T, 1)_s$, $\mathsf{F}_2 := (S, A, 1)_s$, $\mathsf{F}_3 := (A, 1)_s$, $\mathsf{F}_4 := (T, 1)_s$, $\mathsf{F}_5 := (1)_s$. Beachte, daß die *Menge* F_1 sechs und die *Menge* F_4 vier Mitglieder hat. Es gilt:

$$\Lambda(\mathsf{F}_1) = (S/A) \times T \simeq Z_2 \times Z_2$$

(denn: $\Delta(\mathsf{F}_1) = S \times A \times T \times 1$,

$$\Gamma(\mathsf{F}_1) = \langle A \times A \times 1 \times 1, (a^{-1}, a, 1, 1), (a, a, 1, 1) | a \in A \rangle$$
$$= A \times A \times 1 \times 1)$$

$$\mathrm{Locksec}(\mathsf{F}_1) = \{\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \mathsf{F}_3\}$$

$$\mathsf{F}_3 = (\mathsf{F}_1)_*.$$

Die Lauschgruppe hat also eine Untergruppe “zuviel.”

(b) $G := \mathrm{Dih}(8)$. Man sieht leicht: $(\mathsf{E}_G)_* = (Z(G), 1)_G$, und $((\mathsf{E}_G)_*)_* = (1)_G$.

4. ANWENDUNGEN

4.1. *Zur Lockettvermutung*

Lockett äußerte in seiner Ph.D. Thesis [9] die Vermutung, daß jede auflösbare Fittingklasse $\mathscr{F}$ Durchschnitt einer Fittingklasse aus dem Lockettabschnitt von $\mathscr{S}$ und einer Lockettklasse ist. Bryce und Cossey [4] zeigten die Äquivalenz dieser Aussage zu $\mathscr{F}_* = \mathscr{F}^* \cap \mathscr{S}_*$ und die Gültigkeit dieser Formel für eine große Klasse von Fittingklassen. Berger und Cossey [3] konstruierten ein Gegenbeispiel. Wir wollen hier ein ähnliches, allerdings nichtauflösbares Beispiel konstruieren, das die Grundidee von Berger und Cossey illustriert, ohne den Ballast der Dark-Konstruktion mit sich zu tragen. Wir widerlegen also nur $\mathscr{F}_* = \mathscr{F}^* \cap \mathscr{E}_*$. (Dies ist wegen $\mathscr{S}_* = \mathscr{S} \cap \mathscr{E}_*$ [2] eine Verschärfung der Vermutung von Lockett.)

Mit der Lockettvermutung verwandt ist die—meines Wissens bisher unbeantwortete—Frage nach der Anpassung des unteren Sternes an Durchschnitte von Fittingklassen. Dasselbe Beispiel wird auch diese Frage negativ beantworten. Sei J eine endliche nichtabelsche einfache Gruppe, so daß $\mathrm{Out}(J) \simeq \mathrm{Dih}(8)$. (Existenz: Siehe [5].) Sei $\mathbf{W} := \mathbf{A}_J/\mathrm{Inn}(J)^\natural \simeq \mathrm{Dih}(8) \wr \mathbf{S}$ und $(\mathbf{d}, \mathbf{W})$ das äußere $\mathscr{E}$-Fittingpaar $(\mathbf{d}^{J, \mathscr{E}, (1)} \bmod \mathrm{Inn}(J)^\natural, \mathbf{W})$. Sei $\mathscr{F}_1$ die Fittingklasse $\mathbf{d}^{-1}\mathsf{E}_{Z^\natural}$, wobei Z das Zentrum von $\mathrm{Dih}(8)$ ist.

Die Lockettvermutung. Wir betrachten das normale $\mathsf{E}_{Z^\natural}$-Fittingmengenpaar $(\mathbf{e}, Z_2) := (\mathbf{e}^{Z^\natural, W}, \mathbf{W}/[Z^\natural, \mathbf{W}])$. Ist G die endliche Gruppe $Z \bmod \mathrm{Inn}(J) \leqslant \mathrm{Aut}(J)$, so ist G nicht im Kern des normalen $\mathscr{F}_1$-Fittingpaares $(\mathbf{e} \circ \mathbf{d}, Z_2)$, also $G \notin (\mathscr{F}_1)_*$. Andererseits ist G die Kommutatorgruppe von $\mathrm{Aut}(J)$, also $G \in \mathscr{E}_*$; sicher gilt $G \in \mathscr{F}$, und wir schließen:

$$\mathscr{E}_* \cap \mathscr{F}_1 \neq (\mathscr{F}_1)_*.$$

Durchschnitte von Fittingklassen. Wir behalten die Notation bei. Sei $C \leqslant \mathrm{Dih}(8)$ zyklisch, $E \leqslant \mathrm{Dih}(8)$ elementarabelsch, jeweils vom Index 2. Setze $\mathscr{F}_2 := d^{-1}\mathbf{E}_{(C^\natural)}$, $\mathscr{F}_3 := d^{-1}\mathbf{E}_{(E^\natural)}$.

Ist R eine der Gruppen E mod $\mathrm{Inn}(J)$, C mod $\mathrm{Inn}(J)$, so sieht man leicht ein: $[R, \mathrm{Aut}(R)] \geqslant G$; folglich $G \in \mathscr{F}_{2_*} \cap \mathscr{F}_{3_*}$. Aber $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 \cap \mathscr{F}_3$, und $G \notin \mathscr{F}_{1_*}$. Folglich

$$(\mathscr{F}_2)_* \cap (\mathscr{F}_3)_* \neq (\mathscr{F}_2 \cap \mathscr{F}_3)_*.$$

4.2. *Erzeugung von Fittingklassen*

DEFINITION 4.1. Sei p Primzahl, $n \in \mathbb{N}$:

(a) Wir setzen

$$\mathscr{H}\mathscr{C}(p^n) := \mathbf{D}_0(Z_{p^n})\,\mathscr{E}_{p'}$$

$$\mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n) := (G \in \mathscr{H}\mathscr{C}(p^n) \mid \mathrm{C}_G(\mathrm{O}_p(G)/\Phi(\mathrm{O}_p(G))) = \mathrm{O}_p(G)).$$

(b) Für jedes $G \in \mathscr{H}\mathscr{C}(p^n)$ wählen wir eine der durch die Operation von G auf $\mathrm{O}_p(G)/\Phi(\mathrm{O}_p(G))$ definierten Abbildungen $G \to \mathbf{L}_p$ und bezeichnen sie mit ϑ_G.

SATZ 4.2. *Sei* $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n)$, $G \in \mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n)$. *Wir setzen* $\vartheta(\mathscr{X}) := \{\vartheta_X(X) \mid X \in \mathscr{X}\}$; *dann gilt*:

(a) $\vartheta_G G \in \mathrm{Fitset}_{\mathbf{L}_p}(\vartheta(\mathscr{X})) \Rightarrow G \in \mathbf{Fit}(\mathscr{X})$;

(b) $\vartheta_G G \in \mathrm{Fitset}_{\mathbf{L}_p}(\vartheta(\mathscr{X}))^* \Rightarrow G \in \mathbf{Fit}(\mathscr{X})^*$.

(Ich vermute, daß auch die Umkehrungen gelten; das ist für $n = 1$ durch Betrachtung des $\mathbf{d}^{Z_p}$-Paares (aus [10]) leicht einzusehen, für andere n offen.)

Beweis. (a) (1) *Seien* X, $Y \in \mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n)$, $g \in \mathbf{L}_p$, $\vartheta_Y Y = (\vartheta_X X)^g$. *Dann* $Y \in \mathbf{Fit}(X)$:

Sei $m \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\vartheta_X X$, $\vartheta_Y Y$, $\{g\} \subseteq \mathrm{GL}(m, p)$. Sei V der kanonische $\mathrm{GL}(m, p)$-Modul. Sicher sind die semidirekten Produkte $[V]\,\vartheta_X X$ und $[V]\,\vartheta_Y Y$ isomorph. Sei $W := (Z_{p^n})^m$. Da $\vartheta_X X \in \mathscr{E}_{p'}$, läßt sich die Operation von $\vartheta_X X$ (und analog für Y) auf W ausdehnen. Sicher gilt $[W]\,\vartheta_X X \simeq X \times T_X$, wobei $T_X \in \mathbf{D}_0(Z_{p^n})$; analog für Y. Wir schließen:

$$Y \trianglelefteq Y \times T_Y \simeq [W]\,\vartheta_Y Y \simeq [W]\,\vartheta_X X \simeq X \times T_X \in \mathbf{Fit}(X).$$

(2) *Seien* X, $Y \in \mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n)$, $\vartheta_Y Y \trianglelefteq \vartheta_X X$. *Dann* $Y \in \mathbf{Fit}(X)$:

Bilde W analog zu (1). Dann $[W]\,\vartheta_Y Y \trianglelefteq [W]\,\vartheta_X X$. Wie in (1) gilt $[W]\,\vartheta_X X \simeq X \times T_X$, analog für Y. Dann

$$Y \trianglelefteq Y \times T_Y \simeq [W]\,\vartheta_Y Y \trianglelefteq [W]\,\vartheta_X X \simeq X \times T_X \in \mathbf{Fit}(X).$$

Analog sieht man:

(3) *Seien* $X, Y, Z \in \mathscr{H}\mathscr{C}_t(p^n)$, $\vartheta_z Z = (\vartheta_X X)(\vartheta_Y Y)$ *mit* $\vartheta_X X \lhd \vartheta_z Z \trianglerighteq \vartheta_Y Y$. *Dann* $Z \in \mathbf{Fit}(X, Y)$.

Sei nun $\vartheta_G G \in \mathrm{Fitset}_{\mathbf{L}_p}(\vartheta(\mathscr{X}))$. Dann entsteht $\vartheta_G G$ durch wiederholte Anwendung der Operationen Konjugation, Normalteilerbildung, Bildung normaler Produkte aus Mitgliedern von $\vartheta(\mathscr{X})$. Aus (1), (2), (3) folgt $G \in \mathbf{Fit}(\mathscr{X})$.

(b) Wir setzen $U := \vartheta_G G$, $\mathscr{F} := \mathbf{Fit}(\mathscr{X})$, $\mathsf{F} := \mathrm{Fitset}_{\mathbf{L}_p}(\delta(\mathscr{X}))$. Sei $t \in \mathbf{L}_p$, so daß $UU^t = U * U^t$ ein disjunktes Quadrat von U ist. Nach Voraussetzung ist dann $(U * U^t)_{\mathsf{F}}$ subdirekt in $U * U^t$. Sei m so groß, daß $U * U^t \leqslant \mathrm{GL}(m, p)$, und V der kanonische $\mathrm{GL}(m, p)$-Modul. Wieder läßt sich die Operation von $U * U^t$ auf $W := (Z_{p^n})^m$ ausdehnen. O. B. d. A. gibt es $W_1 \simeq W_2 \leqslant W$, so daß $W = W_1 \times W_2$, und daß $[W](U*U^t) = ([W_1]\,U) \times ([W_2]\,U^t)$, wobei $[W_1]\,U \simeq G \simeq [W_2]\,U^t$; folglich $G \times G \simeq [W](U * U^t)$. Nach (a) ist $[W](U * U^t)_{\mathsf{F}} \in \mathscr{F}$, also $[W](U * U^t)_{\mathsf{F}} \leqslant ([W](U * U^t))_{\mathscr{F}}$. Da die linke Seite subdirekt in $([W_1]\,U) \times ([W_2]\,U^t)$ ist ist die rechte Seite ebenfalls subdirekt; folglich ist $(G \times G)_{\mathscr{F}}$ subdirekt in $G \times G$, also $G \in \mathscr{F}^*$.

Mit den aus [10] bekannten Aussagen über die von einer p-Gruppe in $\mathbf{L}_f$ erzeugten Fittingmenge, vermehrt um folgende einfache Beobachtung:

KOROLLAR 4.3. *Eine Lockettmenge von* $\mathbf{L}_f$, *die eine nichttriviale p-Gruppe enthält, enthält sogar alle p-Untergruppen von* $\mathbf{L}_f$.

folgen nun leicht die folgenden beiden Sätze von Johnsen und Laue–ausgenommen die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) in 4.4, die aus der oben erwähnten offenen Richtung von 4.2 folgen würde.

SATZ 4.4. [7]. *Seien für* $i := 1, 2$ *die nichtnilpotenten Gruppen* $G_i \in \mathscr{E}_p\mathscr{E}_q \cap \mathscr{H}\mathscr{C}(p^n)$ (*p und q verschiedene Primzahlen*). *Definiere für beide Gruppen die Abbildung* $\mathbf{Det}_{G_i}\colon G_i \to \mathrm{GF}(p)^x$ *als die Determinantenabbildung der Operation auf dem Abschnitt* $\mathrm{O}_p(G)/\Phi(\mathrm{O}_p(G))$. *Dann sind äquivalent*:

(i) $\mathbf{Det}_{G_1}(G_1) = \mathbf{Det}_{G_2}(G_2)$,

(ii) $\mathbf{Fit}(G_1) = \mathbf{Fit}(G_2)$.

SATZ 4.5 [7]. *Seien* G_1, G_2 *wie in* 4.4. *Dann gilt*

$$\mathbf{Fit}(G_1)^* = \mathbf{Fit}(G_2)^*.$$

LITERATUR

1. W. ANDERSON, Injectors in finite soluble groups, *J. Algebra* **36** (1975), 333–338.
2. T. R. BERGER, Normal Fitting pairs and Lockett's conjecture, *Math. Z.* **163** (1978), 125–132.
3. T. R. BERGER AND J. COSSEY, An example in the theory of normal Fitting classes, *Math. Z.* **154** (1977), 287–293.
4. R. A. BRYCE AND J. COSSEY, A problem in the theory of normal Fitting classes, *Math. Z.* **141** (1977), 287–293.
5. J. H. CONWAY, R. T. CURTIS, S. A. NORTON, R. A. PARKER, UND R. R. WILSON, "Atlas of Finite Groups," Clarendon, Oxford, 1985.
6. T. O. HAWKES, Finite soluble groups, *in* "Group Theory. Essays for Philip Hall" (K. W. Gruenberg and J. E. Roseblade, Eds.), Academic Press, London/Orlando/San Diego, CA/San Francisco/New York/Toronto/Montreal/Sydney/Tokyo, 1984.
7. K. JOHNSEN UND H. LAUE, Über endlich erzeugte Fittingklassen, *Arch. Math.* **30** (1978), 350–360.
8. H. LAUSCH, On normal Fitting classes, *Math. Z.* **141** (1973), 67–72.
9. F. P. LOCKETT, "On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups," Ph.D. thesis, University of Warwick, 1971.
10. J. PENSE, Outer Fitting pairs, *J. Algebra* **119** (1988), 34–50.
11. J. PENSE, "Äußere Fittingpaare," Dissertation, Mainz, 1987.